BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A

SUBIECTUL IV

Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(1-x)+f(1+x)=f(x),\forall x\in\mathbf{R}$. Să se arate că $\int_0^{2015} f(x)dx=\int_{2013}^{2014} f(x)dx$.

Soluție:

Înlocuind în relația dată pe x cu $-x$, obținem $f(1+x)+f(1-x)=f(-x),\forall x\in\mathbf{R}$, adică $f(x)=f(-x),\forall x\in\mathbf{R}$, deci funcția f este funcție pară. 1p

Înlocuind în relația dată pe x cu $1-x$, obținem $f(x)+f(2-x)=f(1-x),\forall x\in\mathbf{R}$. Rezultă că $f(2-x)+f(1+x)=0,\forall x\in\mathbf{R}$. (1)

Înlocuind în relația (1) pe x cu $x-1$, obținem:

$f(x)+f(3-x)=0,\forall x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow f(x)=-f(3-x),\forall x\in\mathbf{R}$. (2) 1p

Înlocuind în relația (2) pe x cu $x+3$, obținem:

$f(x+3)=-f(-x)=-f(x)=f(3-x)=f(x-3),\forall x\in\mathbf{R}$, adică

$f(x+3)=f(x-3),\forall x\in\mathbf{R}$. (3)

Înlocuind în relația (3) pe x cu $x+3$, obținem $f(x)=f(x+6),\forall x\in\mathbf{R}$, adică funcția f este funcție periodică de perioadă 6. ..... 1p

Pentru $a,b\in\mathbf{R}$ cu $a<b$ avem din relația (2) și faptul că f este continuă că

$\int_a^b f(x)dx=-\int_a^b f(3-x)dx=\int_{3-a}^{3-b} f(x)dx$, adică $\int_a^b f(x)dx+\int_{3-b}^{3-a} f(x)dx=0$. (4)

Pentru $a=0,b=3$ obținem $\int_0^3 f(x)dx=0$. (5) 1p

Cum funcția f este funcție pară rezultă că $\int_{-3}^{0} f(x)dx=0$, iar din periodicitate avem că $\int_3^6 f(x)dx=0$, adică $\int_0^6 f(x)dx=0$. 1p

Folosind proprietatea că $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx,\ \forall x\in\mathbf{R}$, avem că:

$\int_0^6 f(x)dx=\int_3^9 f(x)dx=\int_9^{15} f(x)dx=\ldots=\int_{2007}^{2013} f(x)dx=0$. (6)

Din relațiile (5) și (6) avem că relația de demonstrat devine $\int_{2013}^{2015} f(x)dx=\int_{2013}^{2014} f(x)dx$, de unde pentru $t=x-2013$ obținem $\int_0^2 f(t+2013)dt=\int_0^1 f(t+2013)dt$, adică: $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$. 1p

Din relația (4) pentru $a=0,b=2$ obținem $\int_0^2 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=0$, adică

$\int_0^2 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$.

Finalizare 1p